ಅದನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸುವುದು ಹೇಗೆ

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

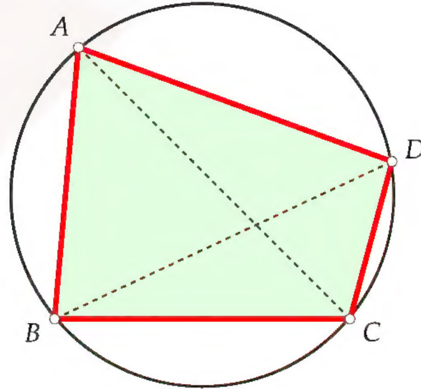
"ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ" ಎಂಬ ಲೇಖನಸರಣಿಯ ಈ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಮತ್ತಷ್ಟು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸರಣಿಯ ಹಿಂದಿನ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿದೆವು. ಅಲ್ಲದೆ ಪ್ರಮೇಯದ ಕೆಲವು ಸೊಗಸಾದ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನೂ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿದೆವು. ಈ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಅಂತಹ ಮತ್ತಷ್ಟು ಅನ್ವಯಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲಿದ್ದೇವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತಹ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (7ನೆಯ ಶತಮಾನ), ಮಹಾವೀರ (9ನೆಯ ಶತಮಾನ) ಮತ್ತು ಪರಮೇಶ್ವರ (15ನೆಯ ಶತಮಾನ) ಇವರುಗಳ ಹೆಸರಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯವೊಂದನ್ನು ಸಹ ಈ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ಸಾಧಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯವು ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ) :

ಪ್ರಮೇಯ 1 (ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದ ಟಾಲೆಮಿ) : *ABCD ಯು ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಈ ಸಮತೆಯು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ:*

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

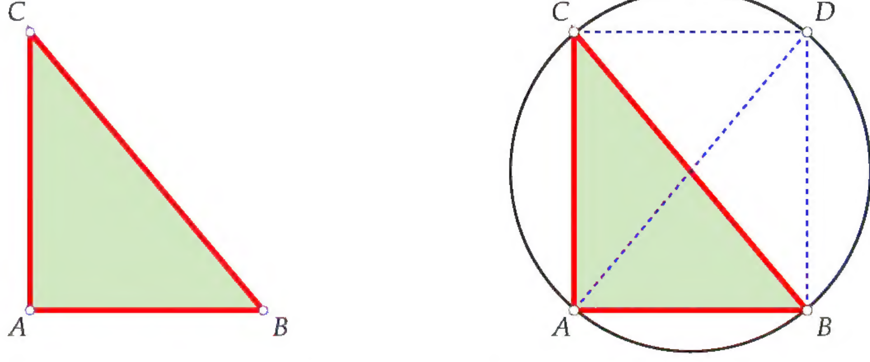


ಚಿತ್ರ 1. ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯ

ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಮತ್ತಷ್ಟು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ (ಹಿಂದಿನ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೆವು). ಮೊದಲನೆಯದು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಶ್ರೇಷ್ಠವಾದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯಾಗಿದೆ.

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ಟಾಲೆಮಿ, ಸದೃಶ ತ್ರಿಭುಜ, ಬಿಂದುವೊಂದರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ



ಚಿತ್ರ 2. ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನ್ವಯ I : ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಮಾಣೀಕರಣ

ಪ್ರಮೇಯ 2 (ಪೈಥಾಗೊರಸ್) : *ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದು, ಶೃಂಗ C ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಇರಲಿ. ಆಗ*

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

ಸಾಧನೆ: D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಂಡು $ABDC$ ಆಯತಾಕಾರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ತುದಿಗಳ ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅದು $ABDC$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $ABCD$ ಅಲ್ಲ. ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿರಿ). $ABDC$ ಯು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (ಆಯತಾಕಾರವು ಸ್ವಗುಣದಿಂದಲೇ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ), ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯವು ಅದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $AB \cdot CD + AC \cdot BD = BC \cdot AD$.

$AB = CD$, $AC = BD$ ಮತ್ತು $AD = BC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (ಇವೆಲ್ಲವೂ ಏಕೆಂದರೆ $ABDC$ ಯು ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರವಾಗಿದೆ) $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ಎಂದರೆ, $b^2 + c^2 = a^2$. ■

ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ: ಮೇಲಿನದನ್ನು ಕೊಂಚ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಮಾಣೀಕರಣವು ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3 (ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ) : *ABC ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ (ಆರ್ಬಿಟ್ರರಿ) ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಗೋಚರವಾಗುತ್ತದೆ:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

ಸಾಧನೆ: $ABDC$ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ $AB \parallel CD$, $AC = BD$ ಮತ್ತು $\angle CAB = \angle DBA$ ಆಗಿರಲಿ. (ತುದಿಗಳ ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಗಮನಿಸಿ. ಅದು $ABDC$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $ABCD$ ಅಲ್ಲ. ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿರಿ). $ABDC$ ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಚಕ್ರೀಯ; ಆದ್ದರಿಂದ ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯವು ಅದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ.

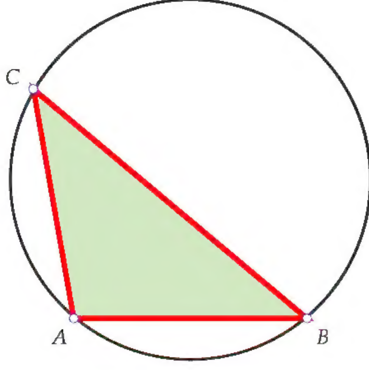
$AD = BC$ ಮತ್ತು $AC = BD$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $BC^2 = AC^2 + AB \cdot CD$, ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c \cdot CD$.

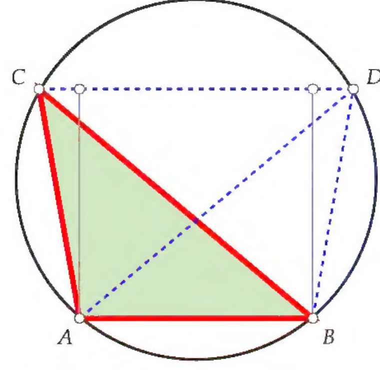
A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ CD ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ (ನೋಡಲು ಗೋಜಲು ಗೋಜಲಾಗುವುದನ್ನು ತಪ್ಪಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಲಘುವಾದ ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಬಂಧ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಮೂಡುತ್ತದೆ

$$CD - AB = 2AC \cos \angle ACD,$$

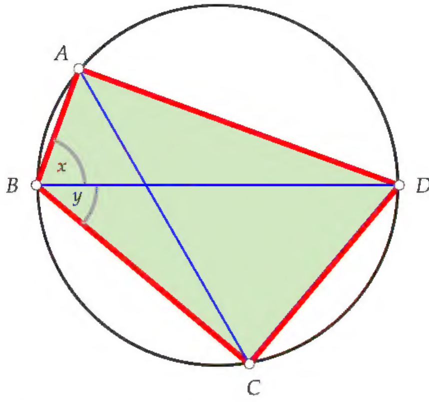
ಹಾಗೂ $\angle ACD$ ಮತ್ತು $\angle CAB$ ಗಳು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಿಯಮಾನುಸಾರ $CD = c - 2b \cos A$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಸಾಧನೆ ಮಾಡಲು ಹೊರಟ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ಸಾಧನೆ ಸಂಪನ್ನವಾಯಿತು. ■

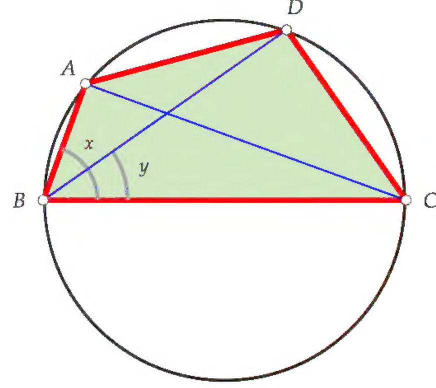
ನಮ್ಮ ಮೂರನೆಯ ಅನ್ವಯವು ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣೀಕರಣವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ; ಅವೆಂದರೆ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ಫಲನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿತವಾದ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ನಿಯಮಗಳು. ಐತಿಹಾಸಿಕವಾಗಿ, ಟಾಲೆಮಿಯು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಫಲನಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಲು ತನ್ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದು ಈ ಮಾರ್ಗದ ಮೂಲಕವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಅಧ್ಯಯನವು ಚರಿತ್ರೆ ಮತ್ತು ಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನಕಾರರಿಬ್ಬರಿಗೂ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಕೈಗೊಂಡ ಕ್ರಮ ಇಂತಿದೆ:





ಚಿತ್ರ 3. ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನ್ವಯ II : ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದ ಸಾಧನೆ





$BD = 1, \angle ABD = x, \angle DBC = y$ $\qquad$ $BC = 1, \angle ABC = x, \angle DBC = y$

ಚಿತ್ರ 4. ಸೈನ್ ಫಲನಕ್ಕೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ನಿಯಮಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಸೈನ್ ಫಲನಕ್ಕೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ನಿಯಮಗಳು

ರೇಖಾಗಣಿತ-ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಗಳಿಂದ ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ನಾವು ಬಳಸುವ ಐಕ್ಯೈಕ ಫಲಿತಾಂಶವೆಂದರೆ ಇದು: R ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ d ಅಳತೆಯ ಜ್ಯಾ ಒಂದು ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ x ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಆಗ $d = 2R \sin x$.

ಲಘುಕೋನಗಳಾದ x, y ಗಳು ನೀಡಲಾಗಿದ್ದು, $0 \le y \le x \le \pi/2$ ಇರಲಿ. $2R = 1$ ಘಟಕ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಚಿತ್ರ 4(a) ಮತ್ತು (b) ಗಳನ್ನು ನೋಡಿ.

(a) ಯಲ್ಲಿ BD ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಾದ x, y ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಮೇಲುವ್ಯಾಪಿಸದೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿವೆ. ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ರೇಖಾಗಣಿತ-ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ದೊರಕುವುದೇನೆಂದರೆ: $AB = \cos x$, $BC = \cos y$, $CD = \sin y$, $AD = \sin x$, $AC = \sin(x+y)$, $BD = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ರೀತ್ಯಾ:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

ಹೀಗೆ ನಮಗೆ ಸಂಕಲನದ ಸೂತ್ರವು ದೊರಕಿತು.

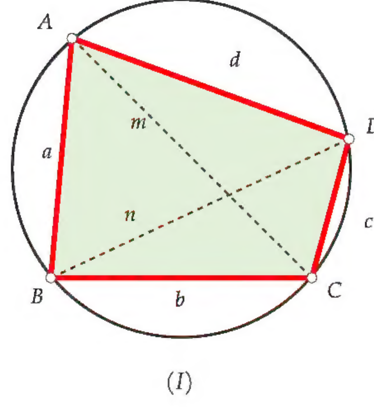
(b) ಯಲ್ಲಿ BC ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಾದ x, y ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಮೇಲುವ್ಯಾಪಿಸಿವೆ. ಈಗ ನಮಗೆ ದೊರಕುವುದೇನೆಂದರೆ: $AB = \cos x$, $BC = 1$, $CD = \sin y$, $AD = \sin(x-y)$, $AC = \sin x$, $BD = \cos y$. ಆದ್ದರಿಂದ ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ರೀತ್ಯಾ :

$$\sin x \cos y = \cos x \sin y + \sin(x-y),$$

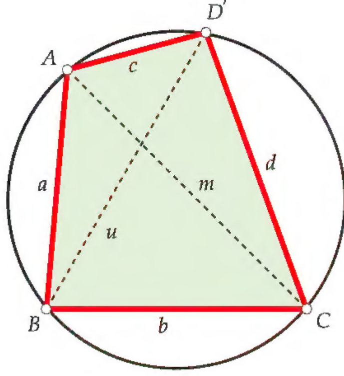
ಮತ್ತು ತತ್ಕಾರಣವಾಗಿ:

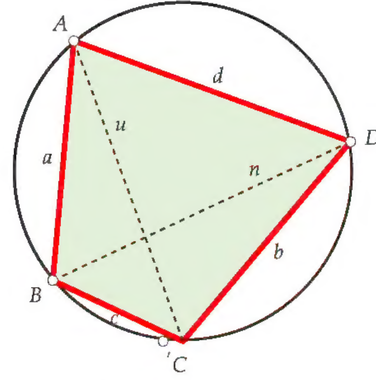
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

ಹೀಗೆ ನಮಗೆ ವ್ಯವಕಲನದ ಸೂತ್ರವು ದೊರಕಿತು.



(I)





(I) → (II): c ಮತ್ತು d ಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲಿಸಿ (I) → (III): b ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲಿಸಿ

ಚಿತ್ರ 5. ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸೂತ್ರಗಳು

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ - ಮಹಾವೀರ ಸರ್ವಸಮತ್ವಗಳು (ಐಡೆಂಟಿಟಿ)

ಇಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುಷ್ಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳಾದ m ಮತ್ತು n ಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ; ಚಕ್ರೀಯ ಚತುಷ್ಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು a, b, c, d ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದ್ದು ಚಕ್ರೀಯ ರೀತಿಯು a, b, c, d ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದೆ. ಚಿತ್ರ 5(I) ನೋಡಿ. ಈ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಾಧನೆಯು ಬೆರಗುಗೊಳಿಸುವಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿವೆ; ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿಗೆ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರು 7ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲೂ, ಪುನಃ ಮಹಾವೀರರು 9ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದರಾದರೂ, ಇವು 15ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಪರಮೇಶ್ವರರ ಸಂಶೋಧನೆಗಳೆಂದೇ ಸಮ್ಮತವಾಗಿವೆ.

ನಾವು 5(I) ರ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರಗಳು 5(II) ಮತ್ತು 5(III) ಅನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. 5(II) ಅನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಭುಜಗಳಾದ c ಮತ್ತು d ಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲಿಸುತ್ತೇವೆ (ಇದು AC ಯ ಲಂಬಕೋನ ಛೇದಕದಲ್ಲಿ D ಅನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ). ಈ ಮೂಲಕ ರಚಿತವಾದ ಚತುಷ್ಕೋನದ ಭುಜಗಳು (ಇವು ಈಗಲೂ ಚಕ್ರೀಯವೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ) a, b, d, c ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಕರ್ಣಗಳು m ಮತ್ತು u ಆಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕರ್ಣ m ಬದಲಾಗದೆ ಇರುತ್ತದೆ).

5(III) ಅನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಭುಜಗಳಾದ b ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲಿಸುತ್ತೇವೆ (ಇದು BD ಯ ಲಂಬಕೋನ ಛೇದಕದಲ್ಲಿ C ಅನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ). ಈ ಮೂಲಕ ರಚಿತವಾದ ಚತುಷ್ಕೋನದ ಭುಜಗಳು (ಇವು ಈಗಲೂ ಚಕ್ರೀಯವೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ) a, c, b, d ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಕರ್ಣಗಳು n ಮತ್ತು u ಆಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕರ್ಣ n ಬದಲಾಗದೆ ಇರುತ್ತದೆ). ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಕರ್ಣ AC' ಯು ಕರ್ಣ BD' ನಷ್ಟೇ ಉದ್ದ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮಾನವಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು u ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸುವುದರ ಮೂಲಕ, ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಮೂರು ಸಂಬಂಧಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ :

$$mn = ac + bd,$$

$$mu = ad + bc,$$

$$nu = ab + cd.$$

ಕಡೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ :

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

ಇದನ್ನು ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ-ಮಹಾವೀರ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ದೊರಕುತ್ತದೆ:

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \qquad n^2 = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ನೀಡುವಂತಹ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು. ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

ಅನ್ನು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ *ಟಾಲೆಮಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಪಾತ ರೂಪ* ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಕರಗಳು

1. ಎ. ಬೋಗೋಮೋಲ್ನಿ, "ಪ್ರಾಬ್ಲಮ್ಸ್ ಥೀರಮ್" ಫ್ರಂ *ಇಂಟರಾಕ್ಟಿವ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಮಿಸೆಲೆನಿ ಅಂಡ್ ಪಝಲ್ಸ್*, http://www.cut-the-knot.org/proofs/ptolemy.shtml, ಪ್ರವೇಶಿಸಿದ್ದು 03 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್, 2016

2. ಎ. ಬೋಗೋಮೋಲ್ನಿ, "ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ-ಮಹಾವೀರ ಐಡೆಂಟಿಟೀಸ್" ಫ್ರಂ ಇಂಟರಾಕ್ಟಿವ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಮಿಸೆಲೆನಿ ಅಂಡ್ ಪಝಲ್ಸ್, http://www.cut-the-knot.org/proofs/PtolemyDiagonals.shtml, ಪ್ರವೇಶಿಸಿದ್ದು 08 ಡಿಸೆಂಬರ್, 2016

3. ಟೋಲೆಮೀಸ್ ಥೀರಮ್, https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy's_theorem



ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿಯವರು ಪುಣೆಯ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (ಕೆಎಫ್ಐ) ನ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರಾಗಿ ಮತ್ತು ರಿಷಿವ್ಯಾಲಿ ಸ್ಕೂಲ್ (ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ) ನ ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಭಾರತದ ಮ್ಯಾಥ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್ ಮೂಮೆಂಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ತೊಡಗಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಹಲವಾರು ಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಶ್ರೀಯುತರು *ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆ್ಯಂಗಲ್ಸ್* ಪತ್ರಿಕೆಯ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಸಂಪರ್ಕ ಕೊಂಡಿ: shailesh.shirali@gmail.com.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್